MÓDULO OBJETIVO

MATEMÁTICA

01. Dada a equação logarítmica 2 log(x +1) – log 5 = log (x^2 – 1), podemos afirmar que sua única raiz é um número real:

a) menor que 1.
b) entre 1 e 2.
c) entre 2 e 3.
d) entre 3 e 4.
e) maior que 4.

Resolução:

$$\text{CE: } \begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ x^2-1>0 \Rightarrow x<-1 \text{ ou } x>1 \end{cases} \quad \therefore \text{CE: } x>1$$

$2 \log (x + 1) – \log 5 = \log (x^2 – 1)$

$\log (x + 1)^2 = \log (x^2 – 1) + \log 5$

$\log (x + 1)^2 = \log 5 \,.\, (x^2 – 1)$

$(x + 1)^2 = 5 \,.\, (x^2 – 1)$

$x^2 + 2x + 1 = 5x^2 – 5$

$4x^2 – 2x – 6 = 0 \quad (: 2)$

$2x^2 – x – 3 = 0$

$$x = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6}{4} = 1{,}5 \\ x_2 = -1 \text{ (não convém)} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x = 1{,}5}$$

Alternativa B

02. Um time de futebol tem 11 jogadores cuja média das idades é 24 anos. Álvaro tem 35 anos.

Se Álvaro for excluído do time, a média das idades dos 10 jogadores restantes será:

a) 22,9 anos.
b) 22,8 anos.
c) 22,7 anos.
d) 22,6 anos.
e) 22,5 anos.

Resolução:

Seja $\mathbf{a_i}$ a idade do jogador de número **i**.

Temos: $$M_{11} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{10} + 35}{11} = 24$$

$\therefore a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 229$

Então a idade média dos 10 jogadores em questão é:

$$M_{10} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{10}}{10} = \frac{229}{10} = \mathbf{22{,}9}$$

Alternativa A

03. As matrizes **A**, **B** e **C** são quadradas de ordem 3, e **O** é a matriz nula, também de ordem 3.

Assinale a alternativa correta.

a) $(A + B)(A – B) = A^2 – B^2$
b) Se AB = O , então A = O ou B = O.
c) AC = CA
d) (A – B)C = AC – BC
e) $(B + C)^2 = B^2 + 2BC + C^2$

Resolução:

a) **Falsa**.
$$(A + B)\,(A – B) = A^2 - \underbrace{AB + BA}_{\text{A e B não comutam necessariamente}} - B^2$$

b) **Falsa**.

Sejam, por exemplo, as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fazendo $A \,.\, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Portanto **A** e **B** não são necessariamente nulas.

c) **Falsa**.
A e C não comutam necessariamente

d) **Verdadeira**.
(A – B) C = AC – BC (propriedade distributiva)

e) **Falsa**.
$$(B + C)^2 = (B + C)\,(B + C) = B^2 + \underbrace{BC + CB}_{\text{B e C não comutam necessariamente.}} + C^2$$

Alternativa D

04. O sistema linear nas incógnitas **x, y** e **z**

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + y + mz = 0 \\ 2x + 3z = 1 \end{cases}$$

é possível e determinado se, e somente se:

a) $m \neq \frac{13}{4}$
b) $m \neq \frac{14}{5}$
c) $m \neq \frac{15}{6}$
d) $m \neq \frac{16}{7}$
e) $m \neq \frac{17}{8}$

Resolução:

Para termos um SPD, basta que $D \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4m - 13 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{13}{4}$$

Alternativa A

05. No plano cartesiano, considere a região P, cujos pontos satisfazem às inequações simultâneas

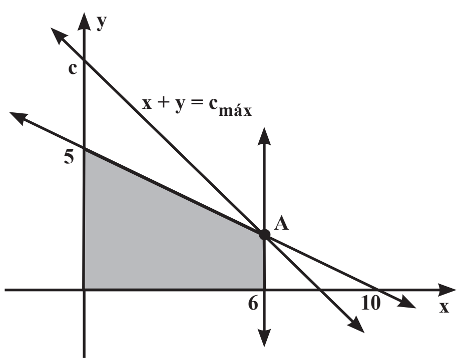
$$\begin{cases} \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{5} \le 1 \\ x \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Considere o feixe de retas paralelas $x + y = c$, $c \in R$. O maior valor de **c** para o qual uma reta do feixe intercepta a região P é:

a) 7
b) 7,5
c) 8
d) 8,5
e) 9

Resolução:

Para o sistema de inequações dado, temos a região sombreada:



O ponto A do gráfico, que pode ser obtido fazendo-se a intersecção das retas $\dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{5} = 1$ e $x = 6$, tem coordenadas (6; 2).

A reta
$x + y = c \Rightarrow y = -x + c$
terá maior valor de **c** quando contiver o ponto A,
pois o coeficiente angular da reta é $m = -1$.
Daí resulta que: $c = x_A + y_A = 6 + 2 \Rightarrow$ **$c = 8$**

Alternativa C

06. Uma prova consta de 15 testes de múltipla escolha, cada um com 5 alternativas, das quais apenas uma está correta. Um aluno não sabe nada e, por isso, marca todas as respostas ao acaso. Qual é a probabilidade de ele acertar ao menos um teste?

a) $0{,}8^{15}$
b) $1 - 0{,}2^{15}$
c) $0{,}2^{15}$
d) $1 - 0{,}8^{15}$
e) $0{,}2^{15} + 0{,}8^{15}$

Resolução:

$$\begin{cases} P\left(\text{acertar qualquer teste}\right) = \dfrac{1}{5} \\ P\left(\text{errar qualquer teste}\right) = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

P (acertar ao menos um teste) = 1 – P(errar os 15 testes)

P (acertar ao menos um teste) = $1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^{15}$

P (acertar ao menos um teste) = $\mathbf{1 - 0{,}8^{15}}$

Alternativa D

07. Quando o preço do ingresso para uma peça de teatro é **p** reais, o número de pessoas que comparecem, por apresentação, é **x**. Sabe-se que **p** relaciona-se com **x** mediante a equação

$$p = 800 - 4x.$$

Nessas condições, a receita máxima que se pode obter, por apresentação, é:

a) R$ 32 000,00
b) R$ 36 000,00
c) R$ 40 000,00
d) R$ 44 000,00
e) R$ 48 000,00

Resolução:

p: preço do ingresso
x: número de pessoas

A receita é dada por:

$R = p \,.\, x = (800 - 4x)\, x \;\therefore\; R = 800\,x - 4x^2$

A receita máxima é dada por:

$$R_{Máx} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$R_{Máx} = -\frac{\left[800^2 - 4(-4)\,(0)\right]}{4\,(-4)}$$

$R_{Máx} = 40\,000{,}00$

Alternativa C

08. O valor de um automóvel decresce exponencialmente em relação ao tempo, de modo que seu valor, daqui a **t** anos, será $V = 40000(0{,}8)^t$, com $t \ge 0$.

Depois de quanto tempo, aproximadamente, o valor do carro será 1/4 de seu valor hoje?

Considere o valor de log 2 como, aproximadamente, 0,30.

a) 4 anos
b) 6 anos
c) 8 anos
d) 5 anos
e) 7 anos

Resolução:

Valor hoje: $V(0) = 40\,000 \,.\, (0{,}8)^0 = 40\,000$

O automóvel valerá $\frac{1}{4}$ desse valor quando V = 10 000.

Assim: $10\,000 = 40\,000 \,.\, 0{,}8^t \Rightarrow 0{,}8^t = \frac{1}{4}$

Aplicando logaritmo decimal nos dois membros da equação, resulta:

$\log 0{,}8^t = \log \frac{1}{4} \Rightarrow t \,.\, \log \frac{8}{10} = \log 1 - \log 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow t\,[\log 2^3 - \log 10] = 0 - \log 2^2 \Rightarrow t\,[3 \,.\, 0{,}30 - 1] = -2 \,.\, 0{,}30$

$\Rightarrow t \,.\, 0{,}1 = 0{,}6 \Rightarrow$ **t = 6 anos** **Alternativa B**

09. Roberto estima que, daqui a dois anos, o preço de um carro seja R$ 46 200,00. Para poder comprar o carro à vista, daqui a dois anos, ele deposita hoje **x** reais e depositará mais **x** reais daqui a um ano, num fundo que rende 10% ao ano a juros compostos, de modo que tenha exatamente esse valor (R$ 46 200,00) daqui a dois anos.

O valor de **x** é um número cuja soma dos algarismos da parte inteira é igual a:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

Resolução:

Do enunciado, obtemos:

$(x(1{,}1) + x)\,(1{,}1) = 46\,200$
$2{,}1x = 42\,000$
$x = 20\,000$

Assim, a soma dos algarismos de **x** é **2**. **Alternativa A**

10. Um estagiário trabalha 20 horas por semana, no total, em duas empresas: **A** e **B**.
A empresa **A** paga R$ 12,00 por hora e a **B**, R$ 20,00 por hora.
Certa semana, ele recebeu um total de R$ 360,00.
Se, nessa semana, ele trabalhou **x** horas na empresa **A** e **y** horas na empresa **B**, o valor de $|\,x - y\,|$ é igual a:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Resolução:

Do enunciado, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 12x + 20y = 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \end{cases}$$

$\therefore\ |\,x - y\,| = |\,5 - 15\,| = |-10\,| = \mathbf{10}$ **Alternativa E**

11. O espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto dos números inteiros positivos E = {1, 2, 3, ... }.
Seja $\mathbf{p_i}$ a probabilidade de o resultado ser igual a **i**.
Suponha que $\mathbf{p_i = m^i}$.

O valor da expressão $\sum_{i=4}^{\infty} \mathbf{p_i}$ é:

a) 1/5
b) 1/6
c) 1/7
d) 1/8
e) impossível de determinar.

Resolução:

Temos que $P_1 + P_2 + P_3 + ... = 1 \Leftrightarrow m^1 + m^2 + m^3 ... = 1$

$\Leftrightarrow \frac{m}{1 - m} = m \Leftrightarrow m = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Desta forma, vem que:

$$\sum_{i=4}^{\infty} P_i = P_4 + P_5 + P_6 + ... = m^4 + m^5 + m^6 ...$$

$$\sum_{i=4}^{\infty} P_i = \frac{m^4}{1 - m} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$$

Alternativa D

12. Estima-se que, em 2009, a receita mensal de um hotel seja dada (em milhares de reais) por $R(t) = 3000 + 1500 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, em que t = 1 representa o mês de janeiro, t = 2, o mês de fevereiro, e assim por diante.

A receita de março será inferior à de fevereiro em:

a) R$ 800 000,00
b) R$ 750 000,00
c) R$ 700 000,00
d) R$ 650 000,00
e) R$ 850 000,00

Resolução:

Temos que $R(t) = 3000 + 1500 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$

Receita de fevereiro $R(2) = 3000 + 1500 \,.\, \cos\left(\frac{\pi \,.\, 2}{6}\right)$

$R(2) = 3000 + 1500 \,.\, \frac{1}{2}$

$\mathbf{R(2) = 3750}$

Receita de março $R(3) = 3000 + 1500 \,.\, \cos\left(\frac{\pi \,.\, 3}{6}\right)$

$R(3) = 3000 + 1500 \,.\, 0$

$\mathbf{R(3) = 3000}$

A receita de março é inferior à de fevereiro em R$ 750.000,00.

Alternativa B

13. No plano cartesiano, a área da região determinada pelas inequações simultâneas $x^2 + y^2 \leq 1$ e $|x + y| \geq 1$ é igual a :

a) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$ b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}$

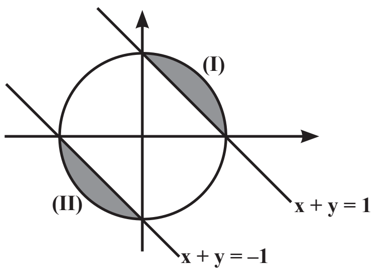
d) $\frac{\pi}{2} - 1$ e) $\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}$

Resolução:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ |x + y| \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + y \geq 1 \end{cases} \textbf{(I)} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + y \leq -1 \end{cases} \textbf{(II)}$$

Representação gráfica das regiões **I** e **II**:



A área (S) pedida pode ser calculada por:

$$S = 2 \,.\, \underbrace{\left(\frac{\pi \,.\, 1^2}{4} - \frac{1 \,.\, 1}{2} \right)}_{A_{setor} \,-\, A_{triângulo}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Alternativa D

14. Um *notebook* é encontrado à venda com diferentes opções para as seguintes características: tipo de processador, cor e capacidade de memória. São elas:

- Tipo de processador: A, B, C ou D;
- Cor: preta, marrom, vermelha, azul;
- Capacidade de memória: 3Gb, 4Gb.

Eduardo vai comprar um *notebook*, mas não quer que ele seja de cor marrom. O número de possibilidades para Eduardo escolher o *notebook* é um número natural.
Podemos afirmar que esse número é:

a) menor que 10.
b) entre 10 e 20.
c) entre 20 e 30.
d) entre 30 e 40.
e) maior que 40.

Resolução:

Eduardo vai comprar um *notebook* utilizando:
1 processador entre os 4 possíveis (A, B, C e D);
1 cor entre as 3 possíveis (preta, vermelha e azul) e
1 capacidade de memória entre 2 possíveis (3Gb e 4Gb).
O total de possibilidades é n = 4 . 3 . 2 = 24, número que se situa entre 20 e 30.

Alternativa C

15. No plano cartesiano, a figura dada pelas equações paramétricas $x = 2 \cos t$ e $y = 2 \operatorname{sen} t$, em que $t \in R$ é:

a) uma elipse com excentricidade igual a $\frac{1}{2}$.

b) uma elipse com excentricidade igual a 0,2.

c) uma hipérbole equilátera.

d) uma circunferência que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

e) uma circunferência que passa pelo ponto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Resolução:

$$\begin{cases} x = 2 \,.\, \cos t \\ y = 2 \,.\, \operatorname{sen} t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ \frac{y}{2} = \operatorname{sen} t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \cos^2 t \\ \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

Somando as duas equações do sistema acima, resulta:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

que se trata de uma circunferência que contém o ponto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Alternativa E

COMENTÁRIO DAS AVALIAÇÕES DE MATEMÁTICA

A FGV apresentou, em junho/2009, duas provas muito bem estruturadas, abordando conteúdos bem adequados à formação de um administrador de empresas e, ao mesmo tempo, à finalidade de selecionar de forma eficiente os candidatos desse processo.

Prova Objetiva: por destinar-se a um maior número de candidatos, demonstrou preocupação em efetuar uma seleção em primeiro nível, exigindo conhecimentos mais superficiais acerca de um maior número de tópicos do programa.

Prova Discursiva: as 10 questões propostas pela Banca definiram claramente o perfil de aluno pretendido pela instituição, ou seja, aquele que, além do domínio dos conceitos necessários mínimos, demonstre habilidade para interpretar situações-problema, a partir dos textos claros e bem formulados presentes na prova.

Salientamos que, nas duas ocasiões, a habilidade do candidato em interpretar os enunciados propostos, mais do que aplicar mecanicamente os procedimentos memorizados, era decisiva para um bom desempenho.

Também elogiamos o fato de que ambas as provas mostraram alto grau de qualidade e cuidado com a clareza e com o rigor conceitual, à semelhança do que já ocorreu no semestre passado, com uma sensível melhora em relação aos processos seletivos anteriores.