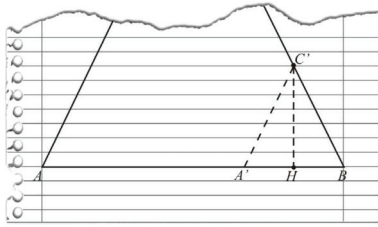


CPV O cursinho que mais aprova na GV

MÓDULO DISCURSIVO

MATEMÁTICA APLICADA

01. Um estudante tinha de calcular a área do triângulo ABC, mas um pedaço da folha do caderno rasgou-se.



Ele, então, traçou o segmento $\overline{A'C'}$ paralelo a \overline{AC} , a altura $\overline{C'H}$ do triângulo $A'BC'$ e, com uma régua, obteve estas medidas:

$C'H = 1,2\text{cm}$, $A'B = 1,4\text{cm}$ e $AB = 4,2\text{cm}$.

- a) Use essas medidas e calcule a área do triângulo ABC.
b) Com a régua, ele mediu também o lado $\overline{A'C'}$ e obteve $A'C' = 1,5\text{cm}$.
Se as medidas em graus dos ângulos agudos \hat{A} e \hat{B} são respectivamente **a** e **b**, calcule o valor de $\text{sen}(a - b)$.

Resolução:

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ (caso AA)

a) $k = \frac{4,2}{1,4} = 3 \therefore h = 1,2 \cdot 3 = 3,6\text{ cm}$

$$A_{ABC} = \frac{4,2 \cdot 3,6}{2} = 7,56\text{ cm}^2$$

A área do triângulo ABC é **7,56 cm²**.

- b) Como o $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ então $\hat{A} \equiv \hat{A'}$ e $\hat{B} \equiv \hat{B'}$.

$$\text{sen } a = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos^2 a = 1 - \frac{16}{25} \therefore \cos a = \frac{3}{5}$$

No $\Delta A'C'H$: $A'H^2 = 2,25 - 1,44 = 0,81 \Rightarrow A'H = 0,9$

No $\Delta BC'H$: $(C'B)^2 = 1,44 + 0,25 = 1,69 \Rightarrow C'B = 1,3$

$$\text{sen } b = \frac{1,2}{1,3} = \frac{12}{13} \therefore \cos^2 b = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \therefore \cos b = \frac{5}{13}$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a$$

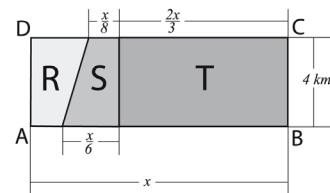
$$\text{sen}(a - b) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-16}{65}$$

O valor de $\text{sen}(a - b)$ é $-\frac{16}{65}$.

FGV – ADM – 07/junho/2009

02. Um meteorito foi detectado por astrônomos nas proximidades da Terra e cálculos feitos mostraram que ele deveria atingir a superfície em uma região deserta, com a forma de um retângulo ABCD. Sabe-se que a área da região S, que tem a forma de um trapézio retângulo, mede 7 km^2 .

Expresse, em porcentagem, a probabilidade de o meteorito cair na região R ou na região T.



Resolução:

Se $A_S = 7$, então $\frac{\left(\frac{x}{8} + \frac{x}{6}\right)4}{2} = 7 \therefore x = 12$

$$A_{ABCD} = 12 \cdot 4 \therefore A_{ABCD} = 48\text{ km}^2$$

A probabilidade de o meteorito acertar uma região é diretamente proporcional à sua área, portanto:

$$P(R \text{ ou } T) = 1 - P(S) = 1 - \frac{7}{48} = \frac{41}{48} \Rightarrow P(R \text{ ou } T) \cong 85,42\%$$

A probabilidade de o meteorito cair na região R ou T é 85,42%.

03. A onça-pintada, também conhecida por **jaguar** ou **jaguetê**, costuma ser encontrada em reservas florestais e matas cerradas, mas, atualmente, é um dos carnívoros brasileiros que corre perigo de extinção. Suponha que, em determinada região, a população de onças-pintadas, $P(t)$, daqui a t anos, será estimada pela função: $P(t) = 60(1 + e^{-0,05t})$. O número **e** pode ser calculado com tanta precisão quanto se queira, mas, nesta questão, aproxime-o, quando necessário, para 2,7.



- a) Faça uma estimativa da população de onças-pintadas que habitarão essa região daqui a vinte anos. Aproxime a resposta para o número inteiro mais próximo.
b) Se mantiver esse decréscimo, daqui a quantos anos será atingido o ponto em que a extinção é inevitável, considerada pelos biólogos em cem indivíduos? Utilize esses valores para os logaritmos neperianos de 2 e 3: $\ln 2 = 0,69$; $\ln 3 = 1,10$.

Resolução:

a) Daqui a vinte anos, a população de onças pintadas será:

$$P(20) = 60 \cdot (1 + e^{-0,05 \cdot 20}) = 60 \cdot (1 + e^{-1}) = 60 \left(\frac{e+1}{e} \right)$$

$$P(20) = 60 \cdot \left(\frac{2,7+1}{2,7} \right) = 60 \cdot \left(\frac{37}{27} \right) \cong P(20) = 82,22$$

Daqui a vinte anos, a população de onças pintadas será 82.

b) Para que a população seja de cem indivíduos, temos

$$P(t) = 100 \Rightarrow 60 \cdot (1 + e^{-0,05t}) = 100 \Rightarrow 1 + e^{-0,05t} = \frac{5}{3}$$

$$e^{-0,05t} = \frac{2}{3} \Rightarrow \ln e^{-0,05t} = \ln \left(\frac{2}{3} \right) \Rightarrow -0,05t = \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,05t = 0,69 - 1,10 \Rightarrow -0,05t = -0,41 \Rightarrow t = 8,2 \text{ anos}$$

Daqui a 8,2 anos será atingido o número de cem indivíduos.

04. Uma editora decidiu disponibilizar o lançamento de um novo livro em duas versões: uma mais elaborada, com capa dura, e outra, popular, com capa de papelão.

Uma pesquisa contratada pela editora registrou que, no dia do lançamento, o lucro da editora poderia ser estimado pela função:

$$L = (25 - 0,5x)x + (30 - y)y - (50 - 0,5x - y)^2 \text{ em que}$$

x é o preço do exemplar de capa dura e

y é o preço do exemplar com capa de papelão, em reais.

O departamento de produção da editora decidiu que o exemplar de capa dura deveria custar o dobro do preço do exemplar de capa de papelão. Buscando obter o maior lucro possível, o diretor de vendas estabeleceu estes preços para as duas versões:

capa dura \rightarrow R\$ 50,00; capa de papelão \rightarrow R\$ 25,00

Foi correta a decisão do diretor de vendas? Por quê?

Resolução:

Temos que $x = 2p$ e $y = p$, portanto:

$$L = (25 - 0,5x)x + (30 - y)y - (50 - 0,5x - y)^2$$

$$L = (25 - 0,5 \cdot 2p)2p + (30 - p)p - (50 - 0,5 \cdot 2p - p)^2$$

$$L = -7p^2 + 280p - 2500$$

$$\text{O lucro será máximo para } p_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{280}{2(-7)} \therefore p_v = 20$$

Portanto **$y = \text{R\$ } 20,00$** (preço do exemplar de capa de papelão) e
 $x = \text{R\$ } 40,00$ (preço do exemplar de capa dura)

Logo, a decisão do diretor não foi correta.

05. Uma empresa recebeu uma verba de R\$ 1 600,00 que deve ser utilizada integralmente para fabricar bolas de tênis. A empresa possui máquinas, cada uma das quais é capaz de produzir, automaticamente, vinte bolas por hora. O custo de preparar e programar as máquinas é de R\$ 80,00 por máquina, para qualquer tempo de utilização. Além disso, são necessários dois trabalhadores para supervisionar todas as máquinas, cada um dos quais recebe R\$ 20,00 por hora.

Quantas máquinas devem ser usadas para produzir o maior número de bolas possível?

Quantas bolas de tênis serão produzidas com essa verba?

Resolução:

Sejam **m** : número de máquinas

t : número de horas trabalhadas

n : número de bolas produzidas

Temos: $80m + 40t = 1600$

$$2m + t = 40 \Rightarrow t = 40 - 2m$$

O número de bolas produzidas é:

$$B(m) = 20m \cdot t = 20m \cdot (40 - 2m) \Rightarrow B(m) = 800m - 40m^2$$

O número de bolas será máximo para:

$$m_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{800}{2(-40)} = 10 \text{ máquinas}$$

Para $m = 10$ máquinas: $B(10) = 20 \cdot 10(40 - 20) = 4000$ bolas

Devem ser usadas 10 máquinas e serão produzidas 4000 bolas com essa verba.

06. a) Determine **a** e **b** de forma que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a & 0,5b \end{bmatrix}$

verifique que $A^2 = 2A$ e depois calcule A^{11} .

b) Nos meses de abril e maio, uma família adquiriu as mesmas quantidades de açúcar, arroz e feijão em um mesmo supermercado, mas os preços sofreram uma leve alteração:

Preço por quilo		Abril	Maio
	Açúcar	R\$ 1,00	R\$ 1,20
	Arroz	R\$ 2,50	R\$ 2,00
Feijão	R\$ 3,00	R\$ 3,00	

Quantidade de pacotes de 1 kg		
Açúcar	Arroz	Feijão
4	5	6

Mediante um produto de matrizes, expresse, por meio de uma matriz, quanto a família gastou em cada mês.

Resolução:

$$a) A^2 = 2A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a & 0,5b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a & 0,5b \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a & 0,5b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+2a & 1+\frac{b}{2} \\ 2a+ab & 2a+\frac{b^2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4a & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+2a=2 \\ 1+\frac{b}{2}=2 \\ 2a+ab=4a \\ 2a+\frac{b^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=0,5 \text{ e } b=2 \therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } A^2 = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = 2A \cdot A = 2A^2 = 2 \cdot 2A = 4A = \begin{bmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = 2A \cdot 2A = 4A^2 = 4 \cdot 2A = 8A = \begin{bmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{bmatrix} (\dots)$$

$$\therefore A^{11} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 2^{10} \\ 2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix} = 2^{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \therefore A^{11} = 1024A$$

Os valores pedidos são: $a = 0,5$, $b = 2$ e $A^{11} = 1024A$.

06. b) A matriz que representa o gasto da família é

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1,00 & 1,20 \\ 2,50 & 2,00 \\ 3,00 & 3,00 \end{bmatrix}$$

$$G = [4 \cdot 1,00 + 5 \cdot 2,50 + 6 \cdot 3,00 \quad 4 \cdot 1,20 + 5 \cdot 2,00 + 6 \cdot 3,00]$$

$$G = [34,50 \quad 32,80]$$

A família gastou R\$ 34,50 em abril e R\$ 32,80 em maio, valores expressos pela matriz $G = [34,50 \quad 32,80]$

07. A História da Matemática apresenta muitos problemas para resolver mediante sistemas de equações, mas cujos enunciados indicam que as soluções são números naturais.

Resolva este antigo problema:

Dois viajantes encontraram uma bolsa que continha entre 150 e 200 moedas de ouro. O primeiro disse para o segundo: “Se eu ficar com metade do dinheiro que há na bolsa, vou me tornar o dobro de rico que você, se não contar o dinheiro que levo comigo”. O segundo disse para o primeiro: “Se eu ficar com dois terços do dinheiro da bolsa, eu terei, com o que levo, o triplo da quantia que você leva consigo”.

Quantas moedas de ouro continha a bolsa?

Que quantia levava cada um dos amigos?

Resolução:

Sejam n o total de moedas contidas na bolsa e A e B as quantidades iniciais possuídas por cada viajante.

Da primeira fala: $\frac{n}{2} = 2B \rightarrow B = \frac{n}{4}$ (I)

Da segunda fala: $B + \frac{2}{3}n = 3A$ (II)

Substituindo (I) em (II), resulta: $\frac{n}{4} + \frac{2}{3}n = 3A \rightarrow A = \frac{11}{36}n$ (III)

Observe que n deve ser múltiplo de 36, pois é uma quantidade inteira.

No intervalo considerado (lembrando que $150 < n < 200$), temos como única possibilidade que $n = 180$ moedas.

Substituindo nas equações (I) e (III): $A = 55$ e $B = 45$ moedas.

A bolsa continha 180 moedas.

Um dos amigos levava 55 moedas e o outro levava 45 moedas.

08. Em uma festa de final de ano, dez funcionários de uma pequena empresa de consultoria se reúnem para participar do “amigo secreto”. Cada um traz um presente que é distribuído, ao acaso, entre os dez.

- a) Quantas possibilidades há de distribuir os presentes?
- b) Qual é a probabilidade de certo funcionário receber exatamente o presente que trouxe?

Resolução:

- a) Vamos compor uma tabela, colocando: na primeira linha, os nomes ordenados dos participantes; na segunda, espaços para serem preenchidos à medida que o sorteio vai acontecendo:

F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀

Por exemplo, uma possível distribuição final seria dada por:

F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀
P ₄	P ₃	P ₅	P ₁	P ₆	P ₇	P ₂	P ₉	P ₁₀	P ₈

Assim, cada possível sequência na segunda linha é uma possível distribuição final de presentes.

Temos então $P_{10} = 10!$ possibilidades.

Há 10! possibilidades de distribuir os presentes.

- b) Um determinado funcionário vai receber seu próprio presente se seu presente aparecer na coluna que lhe é associada:

F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀
P ₆	P ₁	P ₅	P ₂	P ₇	P ₃	P ₉	P ₄	P ₁₀	P ₈
P ₂	P ₉	P ₁	P ₁₀	P ₃	P ₄	P ₈	P ₅	P ₇	P ₆
P ₈	P ₁	P ₇	P ₉	P ₆	P ₅	P ₂	P ₃	P ₁₀	P ₄
P ₁₀	P ₁	P ₃	P ₈	P ₆	P ₇	P ₄	P ₅	P ₂	P ₉

← F₃ recebe o presente p₃

Por exemplo, na 4ª simulação, o funcionário F₃ receberá seu próprio presente.

Como, numa mesma coluna, os eventos são todos equiprováveis, a probabilidade de ocorrência do evento pedido é: $P = \frac{1}{10}$.

Outra maneira de resolver esta questão:

Um certo funcionário pode receber um total de 10 possíveis presentes (todos equiprováveis), sendo que exatamente um desses é o seu próprio. Assim: $P = \frac{1}{10}$

A probabilidade de certo funcionário receber exatamente o presente que trouxe é $P = \frac{1}{10}$

09. a) Determine o comprimento do lado de um quadrado, sabendo que um de seus lados está contido no lado \overline{AB} de um triângulo equilátero $\triangle ABC$, e os outros dois vértices pertencem aos lados \overline{AC} e \overline{BC} .

Dados: A (0,0), B (36,0) e o vértice C está no 1º quadrante.

Considere as medidas dos lados do triângulo expressas em metros.

- b) Um engenheiro pretende construir uma piscina em seu sítio, dentro de um terreno que tem a forma de um triângulo equilátero e a mesma área do triângulo do item A desta questão. A piscina deve ter cerca de 1,5 m de profundidade, deve ocupar a maior área possível, e a borda deve ter a forma de uma circunferência.

De quantos litros de água, aproximadamente, ele vai necessitar, para encher completamente a piscina?
 Se necessário, utilize o valor 3,14 para π .

Resolução:

- a) Temos que:

$$H = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{36\sqrt{3}}{2}$$

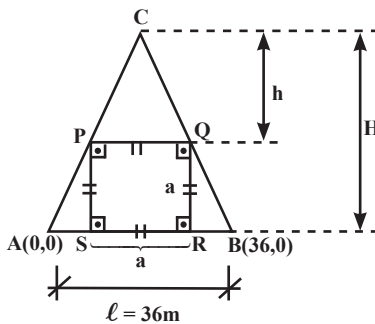
$$H = 18\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle PQC$$

$$\text{Então } \frac{h}{H} = \frac{a}{AB}$$

$$\frac{18\sqrt{3} - a}{18\sqrt{3}} = \frac{a}{36}$$

$$\text{O lado do quadrado é } a = (72\sqrt{3} - 108) \text{ m}$$



- b) $r = \frac{1}{3} H$ (baricentro)

$$r = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3}$$

$$r = 6\sqrt{3} \text{ m}$$

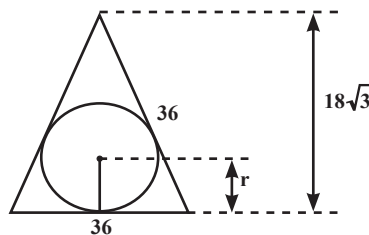
O volume da piscina é:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot \frac{3}{2}$$

$$V \cong 508,68 \text{ m}^3 \therefore V \cong 508.680 \text{ Litros}$$

Para encher a piscina, o engenheiro precisará de 508.680 litros de água.



10. O conhecimento que temos da matemática na Antiguidade vem, em boa parte, de textos matemáticos redigidos por escribas, propondo problemas para os alunos ou outros escribas resolverem. Leia com atenção esta adaptação do texto “Sou o escriba, o chefe dos trabalhadores”, e resolva o problema que o autor propõe como um desafio a outro escriba:

- a) *Temos de resolver um problema e calcular certa taxa de juro. Um velho mercador emprestou um capital de 8 moedas de ouro, a certa taxa anual de juro composto, durante 3 anos. Passado esse tempo, o velho mercador ficou muito contente: somente de juros, ele recebeu 19 moedas de ouro! Os escribas estarão todos reunidos para descobrir a taxa de juro da aplicação, mas nenhum saberá como fazê-lo. Voltar-se-ão para ti e te dirão: “Tu és um escriba hábil, meu amigo! Responde rápido para nós, honra tua reputação, para que não se possa dizer que existe alguma coisa que o chefe dos escribas não saiba: a que taxa anual de juro composto o mercador aplicou o seu dinheiro?”*
- b) Para encontrar a taxa de juro, você resolveu uma equação polinomial do terceiro grau.
 Quais são as outras duas raízes dessa equação?

Resolução:

- a) $M = C(1+i)^t$

$$J = M - C$$

$$J = 8(1+i)^3 - 8 = 19$$

$$8(1+i)^3 = 27 \Rightarrow (1+i)^3 = \frac{27}{8} \therefore 1+i = \frac{3}{2}$$

$$i = \frac{1}{2} \therefore i = 50\% \text{ a.a.}$$

O mercador aplicou seu dinheiro à taxa de juro composto de 50% ao ano.

- b) Seja x a taxa anual de juro.

$$\text{Se } (1+x)^3 = \frac{27}{8} \text{ e } 1+x=p, \text{ temos: } p^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 0$$

$$\text{Fatorando } \left(p - \frac{3}{2}\right) \left(p^2 + \frac{3}{2}p + \frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow p = \frac{3}{2} \text{ ou}$$

$$p^2 + \frac{3}{2}p + \frac{9}{4} = 0$$

$$\Delta = \frac{9}{4} - 4 \cdot \frac{9}{4} = -\frac{27}{4}$$

$$p = \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}i}{2}}{2} \begin{cases} p_1 = -\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i \\ p_2 = -\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i \end{cases}$$

$$1+x_1 = -\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i \therefore x_1 = -\frac{7}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

$$1+x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i \therefore x_2 = -\frac{7}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

$$\text{As outras duas raízes são } x_1 = -\frac{7}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i \text{ e } x_2 = -\frac{7}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i.$$