MATEMÁTICA

21. O valor da expressão $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{y-x}{x+y}\right):\dfrac{6}{x^2-y^2}$ para $x = 24$ e $y = 0{,}125$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução:

Temos $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{y-x}{x+y}\right):\dfrac{6}{x^2-y^2} =$

$$= \frac{(x+y)^2+(x-y).(y-x)}{(x-y).(x+y)}\cdot\frac{x^2-y^2}{6} =$$

$$= \frac{4xy}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{6} = \frac{2xy}{3}$$

Como $x = 24$ e $y = 0{,}125 = \dfrac{1}{8}$,

resulta: $\dfrac{2xy}{3} = \dfrac{2 . 24 . \frac{1}{8}}{3} = \mathbf{2}$

Alternativa C

22. Uma costureira pagou R$ 135,00 por uma certa quantidade de metros de um tecido. Ao passar pela loja vizinha, notou que o metro desse mesmo tecido estava R$ 2,00 mais barato que na anterior. Comprou, então, um metro a mais do que na primeira compra, gastando R$ 130,00. Considerando as duas compras, o total de metros de tecido que ela comprou foi:

a) 15
b) 17
c) 19
d) 21
e) 23

Resolução:

Chamando de

x a quantidade de metros de tecido e de
p o preço do metro,

do enunciado, temos:

$$\begin{cases} x . p = 135 \quad (I) \\ (x+1)(p-2) = 130 \quad (II) \end{cases} \Rightarrow 2x - 3 = p \quad (III)$$

Substituindo (III) em (I) resulta:

$$2x^2 - 3x - 135 = 0 \quad \begin{cases} x = 9 \\ x = -\dfrac{15}{2} \ \text{(não convém)} \end{cases}$$

O total comprado foi $x + (x + 1) = 9 + 10 =$ **19m**

Alternativa C

23. Uma prova era composta de 3 testes. O primeiro valia 1 ponto, o segundo valia 2 pontos e o terceiro 4 pontos, não sendo considerados acertos parciais. A tabela abaixo mostra a quantidade de alunos que obtiveram cada uma das notas possíveis:

Nota obtida	0	1	2	3	4	5	6	7
Nº de aluno	2	3	1	5	7	2	3	1

O número de alunos que acertaram o segundo teste foi:

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Resolução:

	Nota obtida	Nº de alunos c/ a nota
Acertaram só o 2º teste:	2	1
Acertaram o 1º e o 2º testes:	3	5
Acertaram o 2º e o 3º testes:	6	3
Acertaram todos os testes:	7	1
Total:		**10**

Alternativa A

24. No sistema linear abaixo, a maior das 3 incógnitas vale:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + 2y - 4z = 12 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) 3
b) − 1
c) 4
d) 2
e) − 3

Resolução:

Do sistema: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 & \text{(I)} \\ x + 2y - 4z = 12 & \text{(II)} \\ 3x - y + 2z = 1 & \text{(III)} \end{cases}$

Fazendo (I) + (II) – (III) temos:
$-5z = 15 \Rightarrow$ $\mathbf{z = -3}$

Fazendo 2 . (II) – (I) temos:
$7y - 9z = 20 \Rightarrow 7y = 20 + (9 \cdot (-3)) \Rightarrow$ $\mathbf{y = -1}$

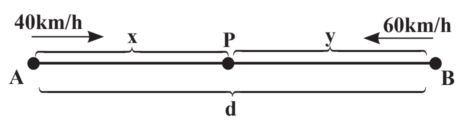
Substituindo **z** e **y** em (II), temos:
$x + 2y - 4z = 12 \Rightarrow x + 2(-1) - 4(-3) = 12 \therefore$ $\mathbf{x = 2}$
A maior das 3 incógnitas vale **2**.

Alternativa D

25. Um caminhão parte da cidade A ao meio dia e dirige-se à cidade B com velocidade constante de 40 km/h, devendo chegar às 6h da tarde desse mesmo dia. Um outro caminhão que saiu às 2h da tarde da cidade B, dirigindo-se à cidade A com velocidade constante de 60 km/h, deverá encontrar-se com o primeiro, nessa mesma tarde, às:

a) 2h50min
b) 3h
c) 3h20min
d) 3h36min
e) 3h42min

Resolução:



Seja **d** a distância entre A e B.

O caminhão que sai de A andará por 6 horas até B a uma velocidade constante:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow 40 = \frac{d}{6} \Rightarrow d = 240 \text{ km}$$

P é o ponto de encontro dos caminhões, de modo que:
AP = x
PB = y

Se **t** é o tempo decorrido até os caminhões se encontrarem, temos:

$$\begin{cases} 40 = \dfrac{x}{t} \Rightarrow x = 40t \quad \text{(I)} \\ 60 = \dfrac{y}{t-2} \Rightarrow y = 60t - 120 \quad \text{(II)} \\ x + y = 240 \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$40t + 60t - 120 = 240 \Rightarrow 100t = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 3{,}6$ horas = **3h36min**

Alternativa D

26. Seja **f** uma função tal que f (x, y) = x se x ≥ y e f (x, y) = y se x < y, onde x e y são reais. Seja **g** uma função dada por g (x) = f (x + 1, 2 – x). O valor mínimo que **g** pode assumir é igual a:

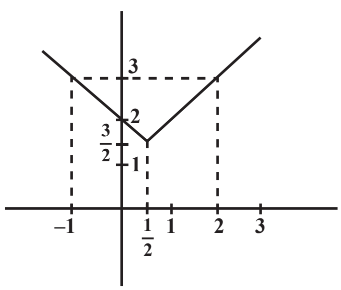
a) 3/2
b) 5/2
c) 1/2
d) – 3/4
e) – 1/2

Resolução:
Temos que g(x) = f (x + 1; 2 – x)
Pelo enunciado

Se $x + 1 \geq 2 - x$, isto é, $x \geq \frac{1}{2}$ então $g(x) = x + 1$

Se $x + 1 < 2 - x$, isto é, $x < \frac{1}{2}$ então $g(x) = 2 - x$

Construindo o gráfico temos:



O valor mínimo ocorre para $x = \frac{1}{2}$ e é igual a $\frac{3}{2}$.
Alternativa A

27. Considere o conjunto A = {x ∈ N* | x ≤ 51}. Retirando-se um número desse conjunto, a média aritmética entre seus elementos não se altera. Esse número é:

a) ímpar
b) primo
c) quadrado perfeito
d) maior que 30
e) múltiplo de 13

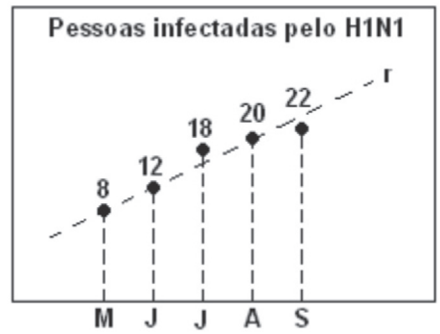
Resolução:
Temos A = {1; 2; 3; ... ; 51}
A média aritmética dos elementos de A é

$$\frac{1+2+3+...+51}{51} = \frac{\frac{(1+51)\,.\,51}{2}}{51} = 26.$$

Temos, ainda, que a média aritmética não se altera quando retiramos do conjunto um elemento cujo valor é igual à média. Desta forma, o número retirado é 26, que é múltiplo de 13.
Alternativa E

28. O gráfico abaixo mostra o número de pessoas comprovadamente infectadas pelo vírus H1N1 numa certa cidade do Brasil, entre os meses de maio e setembro de 2009. Na hipótese de um crescimento linear desse surto, representado pela reta r, pode-se prever que o número de pessoas infectadas em dezembro de 2009 será igual a:

a) 30
b) 36
c) 40
d) 44
e) 48



Resolução:

Dos pontos que estão sobre a reta, podemos perceber que seu crescimento varia conforme uma PA, portanto de forma linear. Então para prever os valores futuros podemos associar os valores a termos de uma PA.

Maio: $a_1 = 8$
Junho: $a_2 = 12$ ∴ $r = 12 - 8 = 4$
⋮
Dezembro: $a_8 = a_1 + (8 - 1)\,.\,4 \Rightarrow a_8 = 36$
Alternativa B

29. Em relação ao teste anterior, sabendo-se que, em maio de 2009, o número de pessoas infectadas correspondia a 0,016 % da população da cidade e de acordo com a tabela de classificação das cidades brasileiras, do IBGE, podemos concluir que a cidade em questão pode ser considerada como:

a) Cidade pequena: 500 a 100 000 habitantes
b) Cidade média: 100 001 a 500 000 habitantes
c) Cidade grande: acima de 500 000 habitantes
d) Metrópole: acima de 1 000 000 de habitantes
e) Megacidade: acima de 10 000 000 de habitantes

Resolução:

Sabendo que em maio o número de pessoas infectadas era 8 (ver gráfico da questão 28), temos:

8 = 0,016% P, onde P é a população da cidade, assim:

$$\Rightarrow 8 = \frac{0{,}016}{100}P \Rightarrow P = 50.000 \text{ habitantes}$$

Alternativa A

30. Do ano 2000 (x = 0) até o ano 2006 (x = 6), o número de automóveis numa certa cidade variou conforme a função V (x) = 9x + 100, enquanto a população variou, nesse mesmo período, segundo o polinômio P (x) = 1,8x² + 47x + 300, sendo V (x) e P (x) dados em milhares de unidades. Podemos afirmar que, nesse período, o número de habitantes por automóvel variou segundo a função:

a) y = 0,2x + 2,4
b) y = 0,3x + 1,8
c) y = 3x + 0,6
d) y = 0,2x + 3
e) y = 1,2x + 1,6

Resolução:
Para x = 0, temos que o número de habitantes por automóvel era

$$H(0) = \frac{P(0)}{V(0)} = \frac{300}{100} = 3$$

Para x = 6, tal número é dado por $H(6) = \frac{P(6)}{V(6)}$

$$\therefore\ H(6) = \frac{1,8(6)^2 + 47(6) + 300}{9(6) + 100} = 4,2$$

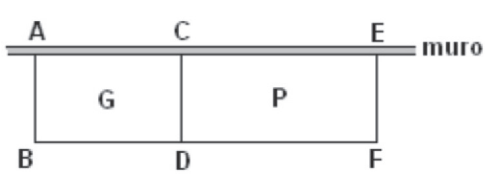
Considerando H(x) linear, temos H(x) = a . x + b e o sistema:

$$\begin{vmatrix} a\,.\,0 + b = 3 \\ a\,.\,6 + b = 4,2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a = 0,2 \\ b = 3 \end{vmatrix}$$

Desta forma, H(x) = 0,2 . x + 3

Alternativa D

31. Um sitiante quer construir, ao lado de um muro retilíneo, dois viveiros retangulares para criação de galinhas e patos, sendo que a área destinada aos patos (P) tem que ter 40 m^2 a mais que a destinada às galinhas (G). Para isso ele dispõe de 60 metros lineares de uma tela apropriada, que deverá ser usada para as cercas AB, CD, EF e BF, conforme a figura abaixo:



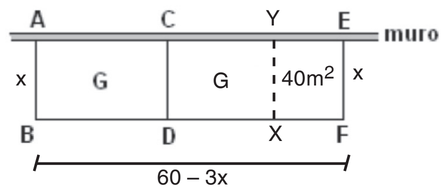
Para conseguir a maior área possível para os viveiros, a medida DF deverá ser de:

a) 15 metros
b) 16 metros
c) 17 metros
d) 18 metros
e) 19 metros

Resolução:

Podemos supor

BD = DX então →



A área total dos viveiros é S_T = x (60 – 3x) ∴ $S_T = -3x^2 + 60x$

$$S_{máx} \text{ para } x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2(-3)} \quad \therefore\ \mathbf{x_V = 10}$$

Se x = 10 então XF = 4m e BD + DX + 4 = 60 – 3x ⇒
⇒ BD = DX = 13

Portanto **DF = 17 metros**

Alternatica C

32. O produto da média aritmética pela média harmônica entre dois números reais positivos é igual ao produto desses números. Dessa forma podemos dizer que a média harmônica entre as raízes da equação $2x^2 - 15x + 3 = 0$ é igual a:

a) 0,4
b) 1,3
c) 0,7
d) 1,5
e) 0,6

Resolução:

Seja M_H, a média harmônica entre a e b.

Do enunciado temos a seguinte relação:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) . M_H = a\,.\,b \Rightarrow M_H = \frac{a\,.\,b}{\frac{a+b}{2}}$$

Sejam α e β as raízes da equação $2x^2 - 15x + 3 = 0$

Temos:

$$\alpha + \beta = -\frac{(-15)}{2} = \frac{15}{2} \overset{(:2)}{\Rightarrow} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\alpha\,.\,\beta = \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ M_H(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\,.\,\beta}{\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{15}{4}} = \frac{3}{2} . \frac{4}{15} = \frac{2}{5} = \mathbf{0,4}$$

Alternativa A

33. Considerando-se $\log 2 = 0{,}3$, o valor do determinante abaixo

é igual a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 4 & \log 16 & \log 400 \\ (\log 2)^2 & (\log 4)^2 & (\log 20)^2 \end{vmatrix}$:

a) 0,36
b) 0
c) 3
d) 0,74
e) 0,42

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 4 & \log 16 & \log 400 \\ (\log 2)^2 & (\log 4)^2 & (\log 20)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\log 2 & 2\log 4 & 2\log 20 \\ (\log 2)^2 & (\log 4)^2 & (\log 20)^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 4 & \log 20 \\ (\log 2)^2 & (\log 4)^2 & (\log 20)^2 \end{vmatrix} \quad \text{Regra de Chió}$$

$$= 2 \,.\, \begin{vmatrix} \log 4 - \log 2 & \log 20 - \log 2 \\ (\log 4)^2 - (\log 2)^2 & (\log 20)^2 - (\log 2)^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \,.\, \begin{vmatrix} \log 2 & \log 10 \\ 3 \,.\, (\log 2)^2 & 2\log 2 + 1 \end{vmatrix} = 2 \,.\, \begin{vmatrix} 0{,}3 & 1 \\ 0{,}27 & 1{,}6 \end{vmatrix} = \mathbf{0{,}42}$$

Alternativa E

34. No plano cartesiano, uma reta de coeficiente angular 1 intercepta a parábola de equação $y = x^2 - 2x + 4$ nos pontos A e V, sendo V o vértice da mesma.

O comprimento do segmento AV é igual a:

a) 1
b) 2
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\sqrt{2}$

Resolução:

$y = x^2 - 2x + 4$

$x_V = -\dfrac{(-2)}{2\,.\,1} = 1$

$y_V = 1^2 - 2\,.\,1 + 4 \Rightarrow \mathbf{y_V = 3} \quad \therefore \quad \mathbf{V\ (1;\ 3)}$

$\left.\begin{array}{l} m_r = 1 \\ \textbf{r} \text{ passa por V (1; 3)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{r: } y - 3 = 1\,.\,(x - 1) \Rightarrow y = x + 2$

O ponto A é intersecção da reta com a parábola, portanto:
$y = x^2 - 2x + 4$ (I)
$y = x + 2$ (II)

Substituindo (II) em (I), resulta:

$x^2 - 2x + 4 = x + 2$
$x^2 - 3x + 2 = 0$ → $x = 1$ ou $x = 2$

Para $x = 1$, $y = 1 + 2 = 3$ $\quad V = (1;\ 3)$

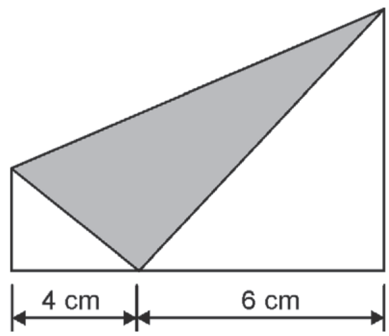
Para $x = 2$, $y = 2 + 2 = 4$ $\quad A = (2;\ 4)$

$AV = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} = \mathbf{\sqrt{2}}$

Alternativa E

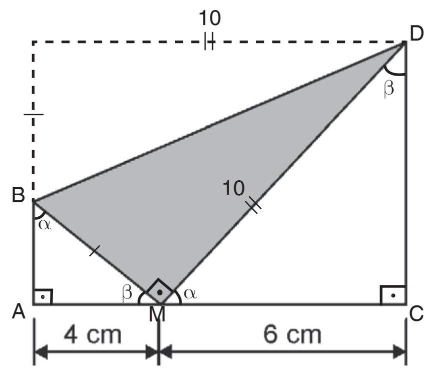
35. Uma folha de papel retangular foi dobrada como mostra a figura abaixo. De acordo com as medidas fornecidas, a região sombreada, que é a parte visível do verso da folha, tem área igual a:

a) 24 cm^2
b) 25 cm^2
c) 28 cm^2
d) 35 cm^2
e) 36 cm^2



Resolução:

Observe a figura a seguir:



Aplicando Pitágoras no ΔDCM, temos DC = 8 cm.

Como $\Delta DCM \sim \Delta MAB$, resulta:

$$\frac{DM}{BM} = \frac{DC}{AM} \Rightarrow \frac{10}{BM} = \frac{8}{4} \quad \Rightarrow \quad BM = 5 \text{ cm}$$

A área do ΔBMD é dada por

$$\frac{BM \cdot DM}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

Alternativa B

36. Um oráculo mente sempre às segundas, terças e quartas feiras, mas fala sempre a verdade nos outros dias. Num certo dia, ao ser perguntado se "hoje é domingo", ele respondeu "sim".

A probabilidade de ele estar mentindo é:

a) 3/7
b) 4/7
c) 3/4
d) 1/4
e) 1/7

Resolução:

Dias em que o oráculo poderia responder "sim":

Dom	2ª F	3ªF	4ªF	5ªF	6ªF	Sáb
V	**M**	**M**	**M**	V	V	V

segunda (mente)
terça (mente)
quarta (mente)
domingo (fala a verdade)
4 dias — 3 mente
— 1 fala a verdade

Portanto, a probabilidade de o oráculo ter mentido, sabendo-se que a resposta foi "sim", é: $P = \frac{3}{4}$

Alternativa C

37. Três números naturais de 2 algarismos formam uma PG de razão 2. Os 6 algarismos usados para escrever os termos dessa PG são todos distintos entre si. O valor máximo que a soma dos termos dessa PG poderá ter é igual a:

a) 126
b) 133
c) 161
d) 147
e) 168

Resolução:

Dos termos da PG

$\overline{AB}$ $\quad 2\overline{AB}$ $\quad 4\overline{AB}$

Como o último termo deve ser múltiplo de 4, temos as seguintes possibilidades:

24, 48, 96 $\rightarrow$ não convém
23, 46, 92 $\rightarrow$ não convém
22, 44, 88 $\rightarrow$ não convém
21, 42, 84 $\rightarrow$ não convém
20, 40, 80 $\rightarrow$ não convém
19, 38, 76 $\rightarrow$ válida

Assim, o valor máximo da soma vale:

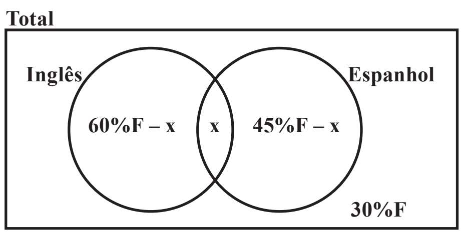
19 + 38 + 76 = 133

Alternativa B

38. Numa empresa multinacional, sabe-se que 60% dos funcionários falam inglês, 45% falam espanhol e 30% deles não falam nenhuma daquelas línguas. Se exatamente 49 funcionários falam inglês e espanhol, podemos concluir que o número de funcionários dessa empresa é igual a:

a) 180
b) 140
c) 210
d) 165
e) 127

Resolução:
Observe o diagrama a seguir:



Assim, 60%F – x + x + 45%F – x + 30%F = 100%F
$\Rightarrow$ x = 35%F

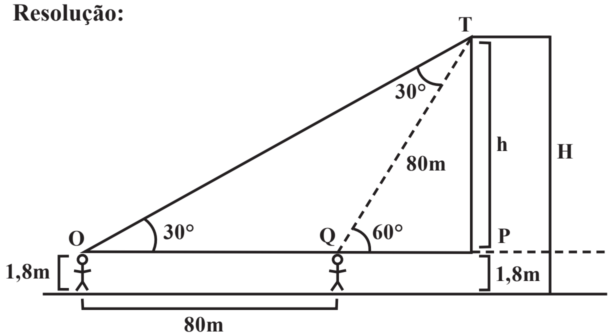
Logo, sendo F o total de funcionários dessa empresa, temos
35% . F = 49 $\Rightarrow$ F = 140

Alternativa B

39. Uma pessoa cujos olhos estão a 1,80 m de altura em relação ao chão avista o topo de um edifício segundo um ângulo de 30° com a horizontal. Percorrendo 80 m no sentido de aproximação do edifício, esse ângulo passa a medir 60°. Usando o valor 1,73 para a raiz quadrada de 3, podemos concluir que a altura desse edifício é de aproximadamente:

a) 59 m
b) 62 m
c) 65 m
d) 69 m
e) 71 m

Resolução:



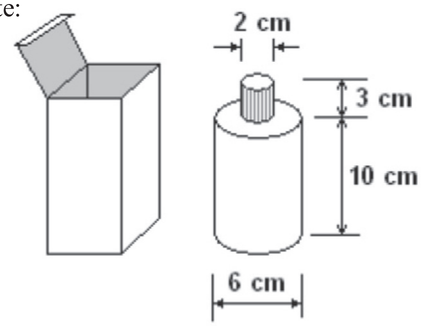
Como ΔOQP é isósceles então $\overline{OQ} = \overline{QT}$ = 80m

No ΔQPT temos que $\text{sen}\,60° = \dfrac{h}{80} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\therefore\; h = 40\sqrt{3}\text{m}$

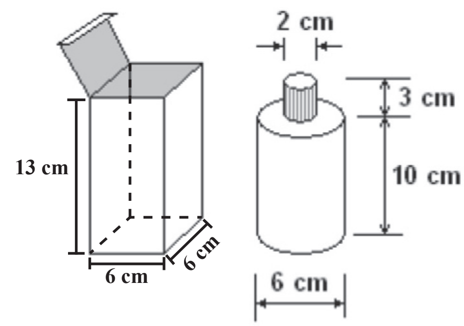
Então $H = 4\sqrt{3} + 1{,}8 \;\therefore\; H \cong 71\text{m}$ **Alternativa E**

40. Um vidro de perfume tem a forma e as medidas indicadas na figura abaixo e sua embalagem tem a forma de um paralelepípedo cujas dimensões internas são as mínimas necessárias para contê-lo. Pode-se afirmar que o volume da embalagem não ocupado pelo vidro de perfume vale aproximadamente:

a) 142 cm^3
b) 154 cm^3
c) 168 cm^3
d) 176 cm^3
e) 182 cm^3



Resolução:
Embalagem



$V_{emb} = A_b \cdot h = 6^2 \cdot 13 = 468\ cm^3$

$V_{vidro} = V_{tampa} + V_{copo} = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 + \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 93\pi$

$V_{\text{não ocupado}} = V_{emb} - V_{vidro} = 468 - 93 \cdot \pi$ com $\pi \cong 3{,}14$

$V = 468 - 93 \cdot 3{,}14 = 175{,}98 \cong$ **176cm³**

Alternativa D

COMENTÁRIO DE MATEMÁTICA DA ESPM

A prova de Matemática da ESPM novembro/2009 recompensou o aluno mais bem preparado com questões bem elaboradas e abrangentes.

Observamos que os examinadores tiveram o cuidado de propor questões clássicas, que figuram entre aquelas de melhor índice de discriminação, dosando o nível de dificuldade de forma equilibrada do fácil ao difícil.

Esperamos que a Banca Examinadora da ESPM continue a elaborar provas nestes moldes para os próximos vestibulares.